

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики і інформатики  
(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Кафедра прикладної математики  
(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

**Кваліфікаційна робота  
магістра**

на тему **«Наближений розв'язок задачі оптимального керування процесом  
нагрівання плоскої стінки з використанням методу прямих»**

Виконав: студент II курсу, групи МП52  
Спеціальність 113 Прикладна математика

Бруско Д.В.  
(прізвище та ініціали)

Керівник д. ф.-м. н. проф. Ромащов Ю.В.  
(прізвище та ініціали)

Рецензент \_\_\_\_\_  
(прізвище та ініціали)

Харків – 2023 рік

## ЗМІСТ

Вступ.....	5
1. Постановка проблеми у загальному вигляді .....	6
1.1 Загальні поняття .....	6
1.2. Математична постановка задачі .....	9
1.3 Фізична постановка задачі .....	10
1.4 Використання методу напівдискретизації.....	12
1.5 Диференціальне рівняння теплопровідності для одномірного потоку тепла .....	14
2. Зведення задачі теплопровідності до звичайних диференціальних рівнянь відповідно до теорії керованості .....	16
2.1. Задача теплопровідності з обмеженням на міцність і керування що зводиться до неоднорідної системи .....	16
2.2 Задача теплопровідності з обмеженням на міцність і керування, що зводиться до однорідної системи .....	25
3. Комп'ютерне моделювання процесів нагрівання плоскої стінки.....	29
3.1 Програмне забезпечення та загальні вихідні данні .....	29
3.2 Моделювання задачі теплопровідності з обмеженням на міцність і керування, що зводиться до неоднорідної системи.....	31
3.3 Рівняння теплопровідності з обмеженням на міцність і керування. ....	35
Висновки .....	37
Додаток А.....	39
Додаток Б .....	40
Список літератури.....	41

## Реферат

Метод напів-дискретизації, або метод прямих, є ефективним підходом до вирішення задач оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами. Основна ідея полягає в трансформації диференціальних рівнянь в частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь, що дозволяє використовувати відомі результати щодо керованості для звичайних диференціальних рівнянь, наприклад, принцип максимуму Понтрягіна, при вирішенні задач оптимізації програмного управління дискретних систем.

Для ілюстрації можливостей методу напів-дискретизації розглянуто конкретну задачу оптимізації програмного управління нагрівом пластини, яка є "плоскою стінкою", з урахуванням обмежень міцності. Застосування методу прямих дозволило перетворити диференціальне рівняння в частинних похідних на звичайне диференціальне рівняння, що було далі вирішено з використанням принципу максимуму Понтрягіна для дискретної системи. Результати показали ефективність методу напів-дискретизації вирішення задач оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами.

## **Abstract**

The method of semi-discretization, or the method of direct lines, is an effective approach to solving optimization problems of software control of systems with distributed parameters. The main idea is to transform partial differential equations to ordinary differential equations, which allows using known controllability results for ordinary differential equations, for example, Pontryagin's maximum principle, when solving the optimization problems of programming control of discrete systems.

To illustrate the possibilities of the semi-discretization method, the specific problem of optimization of programming control of the heating of a plate, which is a "flat wall", is considered, taking into account strength limitations. Application of the method of straight lines made it possible to transform the partial differential equation into an ordinary differential equation, which was further solved using the Pontryagin maximum principle for a discrete system. The results showed the effectiveness of the semi-discretization method for solving optimization problems of programming control systems with distributed parameters.

## ВСТУП

Сучасні технології передбачають наявність енергозабезпечення для живлення приладів та устаткування. Енергозабезпечення здійснюється за допомогою енергоустановок різного типу, що перетворюють різні види енергії до зручного для передачі та використання вигляду. Основу сучасної енергетики складають теплові та ядерні енергоустановки, які виробляють більше 2/3 всієї енергії. Ефективність теплових та ядерних енергоустановок обмежується у першу чергу можливостями передачі теплових потоків між робочими середовищами, тобто в значній мірі визначається процесами теплопровідності. Завдяки цьому, вивчення процесів теплопровідності є надважливою та над актуальною науково-технічною проблемою, розгляд якої необхідний для удосконалення існуючих та створення перспективних конструкцій теплових та ядерних енергоустановок різного призначення.

У роботі розглядається застосування методу напів-дискретизації (методу прямих) для вирішення завдань щодо оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами. У загальному вигляді представлена основна ідея, яка полягає в тому, щоб звести диференціальні рівняння в частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь і розглядати далі задачу оптимізації програмного управління дискретних систем з використанням добре відомих результатів щодо керованості для звичайних диференціальних рівнянь, наприклад з використанням принципу максимуму Понтрягіна. Для ілюстрації можливостей запропонованого підходу розглянуто задачу оптимізації програмного управління нагрівом пластини, – "плоскої стінки", – з урахуванням обмежень міцності.

# 1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ

Програмне управління використовується для автоматизованої або автоматичної зміни стану об'єктів автоматизації під час експлуатації, з урахуванням їх характеристик та обмежень. Вирішення проблеми оптимізації програмного управління є глобальним завданням, оскільки це допомагає підвищити ефективність технічних об'єктів та систем різного призначення. Наприклад, за допомогою програмного управління можна забезпечити вищу якість продукції [1] та зменшити витрати часу та енергії [2]. Також це допомагає зменшити вичерпання ресурсу устаткування [3]. Проблема оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами є складнішою, ніж для дискретних систем, і вважається однією з найголовніших для покращення автоматизації сучасних виробничих комп'ютерно-інтегрованих систем [4-5].

## 1.1 Загальні поняття

В даний час однією з головних проблем є вивчення питання керованості систем із розподіленими параметрами. Такі системи не використовуються настільки широко, як дискретні системи, тому дослідження їх керованості не отримали достатньої уваги до останнього часу. У порівнянні з цим, дискретні системи [6-8] вивчаються протягом багатьох років і вважаються теоретичною основою оптимізації програмного керування такими системами. На даний момент, завдяки активному дослідженню та розробці, дискретні системи стали досить досконалими, а проблеми щодо їх керованості розв'язуються з досить високою точністю. Проте, питання керованості щодо систем із розподіленими параметрами залишається невирішеним, тому інтенсивно вивчається в наш час [9-11]. Важливим завданням дослідження таких систем є забезпечення оптимального керування, зокрема, зменшення витрат часу та енергії, підвищення

ефективності експлуатації об'єктів автоматизації тощо. Такі дослідження відіграють важливу роль у вдосконаленні автоматизації виробничих комп'ютерно-інтегрованих систем.

Термопружність — це галузь механіки, яка вивчає реакцію матеріалів на зміни температури. Вона займається вивченням термічних напруг і деформацій, які виникають у матеріалі через зміни температури. Вивчення термопружності бере свій початок з піонерської роботи Дюамеля в 1837 році, де він запропонував основне співвідношення, що зв'язує коливання температури та пружні деформації з термопружною напругою, тепер відоме як закон Дюамеля-Неймана. У термопружності використовуються математичні моделі, засновані на розподілі температури і деформації термопружних тіл. Вона має широкий спектр застосування в техніці та промисловості.

Розв'язування задач термопружності потребує використання різних методів залежно від конкретних характеристик досліджуваної системи. Один метод передбачає виведення рівнянь на основі модифікованого закону Фур'є. Лорд і Шульман розробили такі рівняння для динамічної термопружності, які зазвичай розглядаються як основа для узагальненої термопружності з одним часом релаксації. Іншу узагальнену теорію розробили Грін і Ліндсей, яка модифікує як рівняння енергії, так і співвідношення Дюамеля-Неймана.

У випадках, коли динаміка бере участь у процесах у твердому тілі, важливо враховувати взаємодію теплових полів із полями зміщення. У таких випадках класичний закон теплопровідності Фур'є може бути незастосовним. Інженерні програми для термопружності повинні враховувати це.

Процеси теплопровідності вивчаються вже досить тривалий час. Вважається, що однією із перших робіт, в якій теплопровідність розуміється та розглядається в сучасному розумінні, є відома робота Фур'є [17]. Вивчення теплопровідності зводиться до розгляду початково-крайових задач,

розв'язування яких, хоча й не містить принципів складностей, але одержання розв'язку у кожному конкретному випадку із заданою геометрією області та властивостями середовища містить певні технічні труднощі, що змушує постійно удосконалювати методи розв'язування задач теплопровідності. Завдяки цьому теплопровідність та методи розв'язування відповідних задач є предметом багатьох сучасних досліджень [18–21] і з урахуванням цього проблема теплопровідності є в цілому достатньо вивченою сьогодні. В той же час, певні проблеми щодо теплопровідності ще не вивчені повністю і до таких проблем відноситься проблема керованості диференціальним рівнянням теплопровідності, яка є надважливою для розв'язування інженерних питань щодо автоматизації перехідних режимів теплових та ядерних енергоустановок. Складність цієї проблеми полягає у тому, що керованість є досить вивченою щодо звичайних диференціальних рівнянь [20], але щодо диференціальних рівнянь у частинних похідних питання керованості сьогодні вивчені недостатньо повно.

З урахуванням означених вище обставин метою даного дослідження є розробка узагальненого підходу щодо оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами задач теплопровідності в плоскій нескінченній стінці з різними граничними умовами на основі поєднання методу напів-дискретизації [12] та добре розроблених методів розв'язування задач керованості дискретних систем [20].

Метод напів-дискретизації [12] є одним з методів оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами. Цей метод полягає в тому, що розподілені параметри системи замінюються на набір дискретних значень, що дозволяє зменшити кількість вхідних даних для програмного управління.

Після заміни розподілених параметрів на дискретні значення, система стає більш структурованою, що дозволяє використовувати різні методи оптимізації



для знаходження найкращого рішення. Зазвичай, метод напівдискретизації використовують для розв'язання задачі оптимізації з обмеженнями, де деякі параметри системи можуть приймати значення тільки з обмеженого набору. Дана робота виконана на основі результатів досліджень щодо оптимального керування процесами теплопровідності, які опубліковані в роботі [21].

## 1.2. Математична постановка задачі

Розглядається система [21] з розподіленими параметрами, що в кожний момент часу  $t \geq t_0$  (де  $t_0 \geq 0$  є заданим моментом часу), може бути представлена як нескінченна кількість точок, які розташовані в Евклідовому просторі  $E$ , не більш ніж тривимірному. Положення кожної точки системи відносно заданої точки простору визначається за допомогою радіус-вектора  $\vec{r}$ , який належить векторному простору  $\vec{E}$ , що породжується простором  $E$ . Система з розподіленими параметрами може бути представлена у вигляді сукупності точок  $\vec{r}$ , які займають область  $\vec{Y}$  з границею  $\vec{v}$ , де  $\vec{Y} \subset \vec{E}$ ,  $\vec{v} \subset \vec{Y}$ .

Стан системи з розподіленими параметрами визначається за допомогою вектору  $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\vec{r}, t)$ , а програма управління цієї системи – за допомогою вектору  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\vec{r}, t)$ . Значення  $\vec{r} \in \vec{Y}$ , повинні належати до певних функціональних просторів, які узгоджені з змістом задачі. Математичні моделі систем з розподіленими параметрами можуть бути представлені у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними, початковими і граничними умовами, які узагальнено можна записати так [21]:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}), \quad \tilde{\mathbf{x}}(\vec{r}, t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in \vec{C}_Y, \quad (1)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{\mathbf{0}}, \quad \forall \vec{r} \in \vec{v}, \quad (2)$$

де  $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u})$  – заданий закон швидкості зміни стану системи;  $\tilde{x}_0(\vec{r})$  – заданий стан системи в момент часу  $t = t_0$ ;  $\vec{C}_Y v$  – доповнення  $\vec{v}$  до  $\vec{Y}$ , яке представляє частину області  $\vec{Y}$ , що не належить до її границі  $\vec{v}$ ;  $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{u})$  – заданий закон стану системи в граничних точках;  $\tilde{0}$  – нульовий елемент відповідного функціонального простору.

Позначимо множину  $U$  оптимальних програм управління як  $\tilde{U}$ , яка складається з усіх програм управління  $\tilde{u} = \tilde{u}(\vec{r}, t)$ , для яких існує єдиний розв'язок  $\tilde{x} = \tilde{x}(\vec{r}, t)$  задачі (1), (2). У подальшому розглядатимемо лише програми управління  $\tilde{u}$ , які належать до множини  $\tilde{U}$ .

Нехай  $\tilde{x}_1(\vec{r})$  є заданим станом системи. При цьому вважаємо, що для цього заданого стану  $\tilde{x}_1(\vec{r})$  системи існує підмножина  $\tilde{U}_1 \subset \tilde{U}$  програм управління  $\tilde{u} = \tilde{u}(\vec{r}, t)$ , для кожного елемента якої існує відповідний йому момент часу  $t_1 > t_0$ , в якому розв'язок задачі (1), (2) задовольняє умові  $\tilde{x}(\vec{r}, t_1) = \tilde{x}_1(\vec{r})$ .

Задача оптимізації програмного управління полягає в тому, щоб для заданого стану  $\tilde{x}_1(\vec{r})$  системи знайти таку програму управління  $\tilde{u} \in \tilde{U}_1$ , для якої різниця між моментами часу  $t_1 - t_0$  є мінімальною, за умови виконання додаткових обмежень [21]:

$$\tilde{Q}(\tilde{x}, \tilde{u}) \geq 0, \quad (3)$$

де  $\tilde{Q}(\tilde{x}, \tilde{u})$  є заданим функціоналом.

### 1.3 Фізична постановка задачі

Давайте розглянемо [21] тонку однорідну стінку з коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda$ . Розмір стінки  $l$  (рис. 1) уздовж осі  $z$  набагато менший за інші

розміри:  $0 \leq z \leq l$ . Ми будемо враховувати [21] тільки теплові потоки уздовж осі  $z$  і будемо визначати поле температури  $T=T(z;t)$ ; поверхню  $z=l$  стінки вважаємо теплоізолюваною. Спочатку, в момент часу  $t=t_0$ , температура стінки мала задане значення  $T(0)=\text{const}$ , і ми повинні підвищити температуру до  $T(l)=\text{const}$ , змінюючи температуру  $u(t)$  на її поверхні  $z=0$ . Ми повинні знайти закон зміни температури  $u(t)$  з часом, який забезпечить найшвидший нагрів пластини, з урахуванням обмеження міцності [21]:

$$u(t) - T(l, t) \leq \frac{2[\sigma]}{Ea}$$

де  $u(t) \leq T(l, t)$  згідно з умовою задачі.  $[\sigma]$ ,  $E$  та  $a$  - задані допустимі напруження, модуль Юнга та коефіцієнт температурного розширення матеріалу пластини.

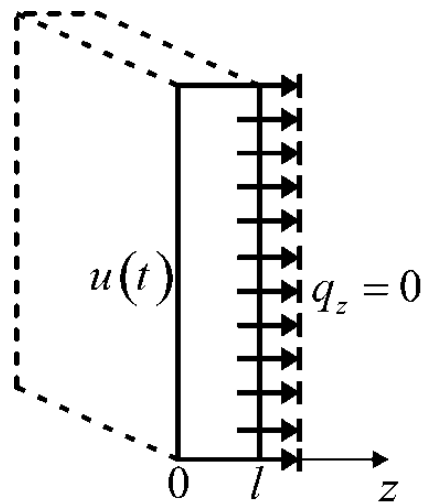


Рис. 1 – До постановки задачі про нагрівання плоскої стінки

Тож постановка даної задачі буде мати вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ T(0, t) = u(t) \\ T(z, 0) = T_{(0)} = const \\ \frac{\partial T(l, t)}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

#### 1.4 Використання методу напівдискретизації

Згідно з методом напівдискретизації [12] ми вводимо сітку [21]:

$$\vec{r}_k \in \vec{Y}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

де  $\vec{r}_k$  – вузол сітки;  $n$  – кількість вузлів сітки.

Завдяки сітці (5) ми можемо розглядати вузлові значення замість неперервних функцій  $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\vec{r}, t)$  та  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\vec{r}, t)$ , що визначатимуть стан системи та програму управління [21]:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(t) = \tilde{\mathbf{x}}(\vec{r}_k, t), \quad \tilde{\mathbf{u}}_k(t) = \tilde{\mathbf{u}}(\vec{r}_k, t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Застосовуючи відомі формули обчислювального диференціювання та метод сіток (скінченних різниць), ми можемо [21] отримати звичайні

диференціальні рівняння з початковою умовою замість диференціальних рівнянь у частинних похідних (1), (2):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (6)$$

де  $\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{x}}_1^T \quad \tilde{\mathbf{x}}_2^T \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{x}}_n^T)^T$ ,  $\mathbf{u} = (\tilde{\mathbf{u}}_1^T \quad \tilde{\mathbf{u}}_2^T \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{u}}_n^T)^T$  – вектори вузлових значень;  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  – дискретна апроксимація заданого закону  $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$  швидкості зміни стану системи;  $\mathbf{x}_0$  – вектор вузлових значень в момент часу  $t = t_0$ .

Аналогічно [21] за допомогою техніки скінченних різностей ми можемо отримати дискретну апроксимацію умови (3):

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0, \quad (7)$$

де  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  – де – функціонал, який представляє дискретну апроксимацію заданого функціоналу з умови  $\tilde{Q}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$  з умови (3).

Отже, за допомогою методу напівдискретизації вихідна система з розподіленими параметрами (1), (2) представлена дискретною апроксимацією (6), що дозволить використовувати добре розроблені методи оптимізації програмного управління дискретними системами [21]. Наприклад, у випадку без урахування додаткової умови (7) ми можемо використовувати відомий принцип максимуму [6]. У випадку лінійного закону швидкості зміни стану системи рівняння (6) матимуть наступний вигляд:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (8)$$

де  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$  – задані матриці.

### 1.5 Диференціальне рівняння теплопровідності для одномірного потоку тепла

Розглянемо одномірне температурне поле (рис. 2) (тепло розподіляється в одному напрямку, наприклад вздовж осі  $x$ ). Термічні коефіцієнти вважаємо незалежними від координат та часу.

Виділимо в однорідній та ізотропній пластині елементарній паралелепіпед, об'єм якого дорівнює  $dx dy dz$ . Кількість теплоти, що впадає в ліву грань  $dy dz$  у паралелепіпед в одиницю часу, дорівнює  $q_x dy dz$ , а кількість теплоти, що витікає з протилежної грані в одиницю часу, дорівнює  $q_{x+dx} dy dz$ .

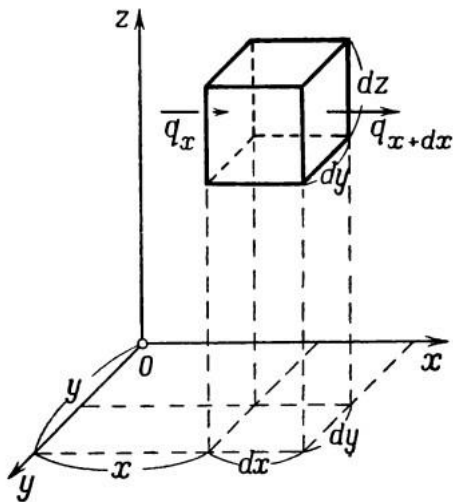


Рис. 2 – Потік тепла через елементарний об'єм

Якщо  $q_x > q_{x+dx}$ , то паралелепіпед буде нагріватися, тоді різниця між цими потоками тепла за законом збереження енергії дорівнює теплу акумульованому даним паралелепіпедом, тобто:

$$q_z dydz - q_{x+dx} dydz = cp \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (9)$$

Розкладемо величину  $q_{x+dx}$  у рад Тейлора і обмежимо її першими двома елементами:

$$q_{x+dx} \approx q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (10)$$

Тоді, підставивши (9) у (10), отримаємо:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz = cp \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

Використовуючи рівняння теплопровідності  $q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ , отримаємо:

$$cp \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

або

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (11)$$

Рівняння (11) і є диференціальним рівнянням теплопровідності для одномірного потоку тепла.

## 2. ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДО ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВІДПОВІДНО ДО ТЕОРІЇ КЕРОВАНOSTІ

Розглянемо задачі теплопровідності плоскої стінки з різними граничними умовами.

### 2.1. Задача теплопровідності з обмеженням на міцність і керування що зводиться до неоднорідної системи

Розглянемо фізичну постановку задачі, а саме приклад модельної задачі оптимізації програмного управління процесом нагріву тонкої однорідної пластини з урахуванням обмежень щодо міцності. Представимо, що розмір  $l$  пластини уздовж осі  $z$ , (рис. 3а), набагато менший інших розмірів  $0 \leq z \leq l$ . Ми будемо розглядати лише теплові потоки вздовж даної осі  $z$  і будемо визначати поле температури  $T = T(z, t)$ ; на цій пластині, вважаючи її поверхню  $z = l$  теплоізолюваною. Спочатку, на момент часу  $t = t_0$  пластина має задану температуру  $T_{(0)} = \text{const}$ , а для досягнення заданого значення необхідно змінити температуру поверхні пластини  $T_{(1)} = \text{const}$ . Метою є знайти закон зміни температури у часі  $u(t)$ , який забезпечить найшвидший нагрів пластини за умови дотримання її міцності [21]:

$$u(t) - T(l, t) \leq \frac{2[\sigma]}{E\alpha}, \quad (12)$$



де  $u(t) \leq T(l, t)$  за змістом задачі;  $[\sigma]$ ,  $E$  та  $\alpha$  – задані допустиме напруження, модуль Юнга та коефіцієнт температурного розширення матеріалу пластини.

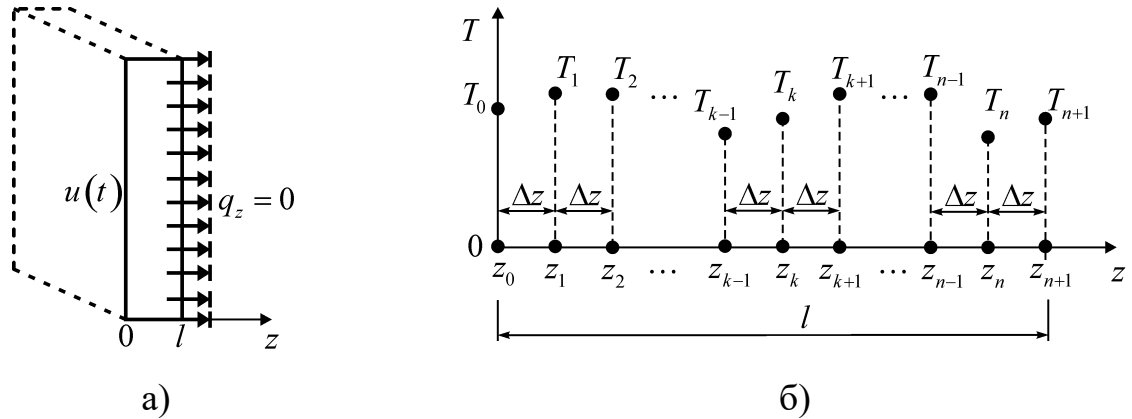


Рис. 3. Пластина (а) та дискретизація її температурного поля (б)

Хоча походження обмеження міцності (12) не є предметом дослідження, проте важливо зауважити [21], що нерівність (12) відповідає обмеженню температурних напружень в однорідній пластині з закріпленими поверхнями  $z = 0$  та  $z = l$ . Ми розглядаємо закон зміни  $u(t)$  температури поверхні  $z = 0$  як програму управління  $u(t)$  станом пластини. Тоді температурний стан пластини, що відповідає програмі управління, можна визначити наступним чином [15, 21]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad T(z, t_0) = T_{(0)}, \quad 0 < z < l, \quad (13)$$

$$T(0, t) = u(t), \quad \frac{\partial T(l, t)}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

де  $a$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини.

Ясно, що система рівнянь (13), (14) з розподіленими параметрами є конкретним випадком загальної математичної моделі (1), (2), де область  $\Upsilon$  відповідає відрізку  $0 \leq z \leq l$ , а границі  $\upsilon$ - точки  $z = 0$  та  $z = l$ . При цьому вектори  $\tilde{\mathbf{x}}$  та  $\tilde{\mathbf{u}}$  зводяться до температури  $T(z, t)$  в точках пластини та температури  $u(t)$  її поверхні  $z = 0$ , а обмеження (12) є частковим випадком загального обмеження (3). Щоб розв'язати задачу (13), (14) за методом напівдискретизації, в області  $0 \leq z \leq l$  вводимо сітку з кількістю  $n$  "внутрішніх" вузлів (рис. 3б), які визначаються наступним чином:

$$z_k = k\Delta z, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \quad (15)$$

де  $\Delta z = \frac{l}{n+1}$  – крок сітки.

Рівнянні теплопровідності (13) обчислюємо за допомогою формули кінцевих різниць у "внутрішніх" вузлах:

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} = \frac{T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}}{\Delta z^2}$$

А для обчислення значення температури у  $n+1$  вузлі, виразимо  $\frac{\partial T_k}{\partial z}$  через два попередні значення:

$$\frac{\partial T_k}{\partial z} = AT_k + BT_{k-1} + CT_{k-2}$$

Тепер розкладемо елементи  $T_{k-1}, T_{k-2}$  у ряд Тейлора:

$$T_{k-1} = T_k - \frac{\partial T_k}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} \Delta z^2 + \dots$$

$$T_{k-2} = T_k - 2 \frac{\partial T_k}{\partial z} \Delta z + \frac{4}{2} \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} \Delta z^2 + \dots$$

Підставивши (9) у (8), отримаємо:

$$\frac{\partial T_k}{\partial z} = (A + B + C)T_k - (B + 2C) \frac{\partial T_k}{\partial z} \Delta z + (B + 4C) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} \Delta z^2 \dots$$

Далі знайдемо коефіцієнти  $A, B, C$  із системи:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -(B + 2C)\Delta z = 1 \\ B + 4C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2\Delta z} \\ B = \frac{-4}{2\Delta z} \\ C = \frac{1}{2\Delta z} \end{cases}$$

В результаті отримаємо:

$$\frac{\partial T_k}{\partial z} = \frac{3T_k - 4T_{k-1} + T_{k-2}}{2\Delta z} \quad (16)$$

Друга формула (16) разом із другою граничною умовою (14) дозволяє записати:

$$T_{n+1} = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{n-1}. \quad (17)$$

За допомогою формули (13), ми визначили температуру у "внутрішніх" вузлах та за допомогою формули (17) виключили із розгляду температуру  $T_{n+1}$  у рівнянні  $k=n$ ;  $T_0 = u$ . Завдяки цьому одержимо дискретну апроксимацію рівнянь (13) у вигляді :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

де  $\mathbf{x} = (T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_n)^T$ ,  $\mathbf{x}_0 = (T_{(0)} \quad T_{(0)} \quad \dots \quad T_{(0)})^T$ ,  $\mathbf{u} = (u)$ ,

$$\mathbf{A} = \frac{a}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{a}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Для отримання програми управління диференціальні рівняння (18) будуть розглянуті разом з додатковими диференціальними рівняннями.:

$$\frac{du}{dt} = F(t, u, T_1, T_2, \dots, T_{n+1}), \quad u(t_0) = T_{(0)} + \frac{2\sigma_T}{E\alpha}, \quad (19)$$

$$\frac{dT_{n+1}}{dt} = \frac{4}{3} \frac{dT_n}{dt} - \frac{1}{3} \frac{dT_{n-1}}{dt}, \quad T_{n+1}(t_0) = T_{(0)}, \quad (20)$$

де  $F(t, u, T_1, T_2, \dots, T_{n+1})$  – функція, яку потрібно підібрати так, щоб виконувалась умова (9), та щоб пластина нагрівалася як найшвидше.

За допомогою додаткових диференціальних рівнянь (19), (20) задача оптимізації програмного управління нагрівом пластини може бути сформульована як вибір функції  $F(t, u, T_1, T_2, \dots, T_{n+1})$ . Подальше розглядання полягає у вивченні множини таких функцій:

$$F(t, u, T_1, T_2, \dots, T_{n+1}) = \begin{cases} \frac{dT_{n+1}}{dt}, & t \leq t_m^{\text{reg}} \\ -\theta(u_m^{\text{reg}} - T_{(1)})e^{-\theta(t-t_m^{\text{reg}})}, & t > t_m^{\text{reg}}, \end{cases} \quad (21)$$

де  $t_m^{\text{reg}}$  та  $u_m^{\text{reg}}$  – момент часу та амплітуда стрибкоподібного зменшення температури  $u(t)$ , які визначаються для заданого номеру  $m \in [0, n+1]$  вузла сітки (18) з умов  $T(z_m, t_m^{\text{reg}}) = T_{(1)}$  та  $u_m^{\text{reg}} = u(t_m^{\text{reg}})$ ;  $\theta = 10$  – числовий параметр, прийнятий для експоненціальної апроксимації стрибкоподібного зменшення температури  $u(t)$ .

У вигляді (21) маємо скінченну підмножину  $n + 2$  відповідних значенням параметру  $m \in [0, n + 1]$  програм управління  $\tilde{U}_1 \subset \tilde{U}$ .

Розглянемо задачу теплопровідності для граничних умов третього і другого роду. Температурний стан пластини визначимо наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, 0 < z < l, t > 0 \\ T(z, 0) &= T_{(0)} = \text{const}, 0 < z < l, t = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(0, t) = \alpha(T(0, t) - u(t)), \frac{\partial T}{\partial z}(l, t) = 0 \quad (23)$$

де  $\lambda$ -коефіцієнт теплопровідності,  $\alpha$ -коефіцієнт тепловіддачі.

Задачі (4),(5) і (18),(19) різняться лише першою граничною умовою (тобто умовою на  $T_0$ ), тому для визначення температури у "внутрішніх" вузлах та у правій границі, треба повторити ті ж кроки, що і для задачі (4),(5).

Для виключення значення  $T_0$  з рівняння (7) ( $k=1$ ), треба виразити  $\frac{\partial T_k}{\partial z}$  через два наступні значення:

$$\frac{\partial T_k}{\partial z} = AT_k + BT_{k+1} + CT_{k+2} \quad (24)$$

Тепер розкладемо  $T_{k+1}, T_{k+2}$  у ряд Тейлора і підставимо у (23):

$$T_{k+1} = T_k + \frac{\partial T_k}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} \Delta z^2 + \dots$$

$$T_{k+2} = T_k + 2 \frac{\partial T_k}{\partial z} \Delta z + \frac{4}{2} \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} \Delta z^2 + \dots$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial z} = (A + B + C)T_k + (B + 2C) \frac{\partial T_k}{\partial z} \Delta z + (B + 4C) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} \Delta z^2 \dots \quad (25)$$

Знайдемо коефіцієнти  $A, B, C$  і в результаті отримаємо:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ (B + 2C)\Delta z = 1 \\ B + 4C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-3}{2\Delta z} \\ B = \frac{4}{2\Delta z} \\ C = \frac{-1}{2\Delta z} \end{cases}$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial z} = \frac{-3T_k + 4T_{k+1} - T_{k+2}}{2\Delta z}$$

Тепер підставимо те, що отримали у (23), отримаємо умову на  $T_0$ :

$$\frac{\partial T_0}{\partial z} = \frac{-3T_0 + 4T_1 - T_2}{2\Delta z}$$

$$\lambda \frac{-3T_0 + 4T_1 - T_2}{2\Delta z} = \alpha(T_0 - u)$$

Далі можна виразити  $T_0$  і одержимо дискретну апроксимацію рівнянь (22), (23) у вигляді (17):

$$\begin{aligned}\lambda(-3T_0 + 4T_1 - T_2) &= 2\Delta z\alpha(T_0 - u), \\ (3\lambda + 2\Delta z\alpha)T_0 &= 4\lambda T_1 - \lambda T_2 + 2\Delta z\alpha u, \\ T_0 &= \frac{4\lambda T_1}{2\Delta z\alpha + 3\lambda} - \frac{\lambda T_2}{2\Delta z\alpha + 3\lambda} + \frac{2\Delta z\lambda\alpha u}{2\Delta z\alpha + 3\lambda}.\end{aligned}$$

Тоді формула кінцевих різниць (7) у першому вузлі буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} &= \frac{a}{\Delta z^2}(T_0 - 2T_1 + T_2) \\ \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} &= \frac{a}{\Delta z^2}\left(\frac{-2\lambda - 4\Delta z\alpha}{2\Delta z\alpha + 3\lambda}T_1 + \frac{2\lambda + 2\Delta z\alpha}{2\Delta z\alpha + 3\lambda}T_2 + \frac{2\Delta z\lambda\alpha}{2\Delta z\alpha + 3\lambda}u\right).\end{aligned}$$

Тобто дискретна апроксимація рівнянь (17), (18) буде мати вигляд:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$



де  $\mathbf{x} = (T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n)^T$ ,  $\mathbf{x}_0 = (T_{(0)} \ T_{(0)} \ \dots \ T_{(0)})^T$ ,  $\mathbf{u} = (u)$ ,

$$\mathbf{A} = \frac{a}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} -\frac{2\lambda + 4\Delta z\alpha}{2\Delta z\alpha + 3\lambda} & \frac{2\lambda + 2\Delta z\alpha}{2\Delta z\alpha + 3\lambda} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \frac{a}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} \frac{2\Delta z\lambda\alpha}{2\Delta z\alpha + 3\lambda} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Задача теплопровідності з обмеженням на міцність і керування, що зводиться до однорідної системи

Давайте розглянемо модельну задачу оптимізації програмного управління процесом нагріву тонкої однорідної пластини з обмеженнями на міцність і

керування. Припустимо, що розмір  $l$  пластини вздовж осі  $z$  (рис. 3а) значно менший, ніж в інших напрямках  $0 \leq z \leq l$ . Ми розглядатимемо тільки теплові потоки вздовж цієї осі та будемо визначати поле температури  $T = T(z, t)$  на поверхні пластини, припускаючи, що її поверхня  $z = l$  є теплоізолюваною. Спочатку, на початковий момент часу  $t = t_0$ , пластина має задану температуру  $T_{(0)} = const$ , і для досягнення певного значення необхідно змінити температуру поверхні пластини  $T_{(1)} = const$ . Метою є знайти закон зміни температури залежно від часу  $u(t)$ , який забезпечить найшвидший нагрів пластини за умови дотримання її міцності.

Постановка задачі представлена формулами (4) і в загальному вигляді апроксимацію рівняння теплопровідності за допомогою методу напів-дискретизації та граничних умов можна представити так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Rightarrow \begin{cases} T_0 = u(t) \\ \frac{dT_k}{dt} = \frac{a}{\Delta z^2} (T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}), k = 1, \dots, n \\ T_{n+1} = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{n-1} \end{cases} \quad (26)$$

Для отримання однорідної системи необхідно записати рівняння щодо керування за допомогою умови (12). Позначимо  $\Delta T = \frac{2[\sigma]}{Ea}$ .

Розглянемо детальніше умову **міцності** (для мінімізації часу від нерівності перейдемо до рівності):

$$|u(t) - T(l, t)| = \Delta T$$

Підставимо  $t = 0$  і отримаємо керування в початковий момент часу:

$$u(0) = T_0 + \Delta T$$

Продиференціюємо умову міцності і отримаємо відповідне рівняння:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dT(l, t)}{dt} \quad (27)$$

Розглянемо рівняння (17):

$$T(l, t) = T_{n+1} = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{n-1} \quad (28)$$

Продиференціюємо (28) і підставимо у (27):

$$\frac{du}{dt} = \frac{4}{3} \frac{dT_n}{dt} - \frac{1}{3} \frac{dT_{n-1}}{dt}$$

За допомогою (26) запишемо розкладання диференціалів  $T_n$  і  $T_{n-1}$ :

$$\frac{dT_n}{dt} = \frac{a}{\Delta z^2} (T_{n-1} - 2T_n + T_{n+1}) \Rightarrow \frac{dT_n}{dt} = \frac{a}{\Delta z^2} \left( \frac{2}{3}T_{n-1} - \frac{2}{3}T_n \right)$$

$$\frac{dT_{n-1}}{dt} = \frac{a}{\Delta z^2} (T_{n-2} - 2T_{n-1} + T_n)$$

Рівняння щодо керування можна записати так:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{4a}{3\Delta z^2} \left( \frac{2}{3}T_{n-1} - \frac{2}{3}T_n \right) - \frac{a}{3\Delta z^2} (T_{n-2} - 2T_{n-1} + T_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{du}{dt} &= \frac{a}{\Delta z^2} \left( -\frac{1}{3}T_{n-2} + \frac{14}{9}T_{n-1} - \frac{11}{9}T_n \right) \\ u(0) &= T_0 + \Delta T \end{aligned}$$

Апроксимована система має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = u(t) \\ \frac{dT_k}{dt} = \frac{a}{\Delta z^2} (T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}), \quad k=1, \dots, n \\ T_{n+1} = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{n-1} \\ \frac{du}{dt} = \frac{a}{\Delta z^2} \left( -\frac{1}{3}T_{n-2} + \frac{14}{9}T_{n-1} - \frac{11}{9}T_n \right) \\ u(0) = T_0 + \Delta T \end{array} \right. \quad \frac{dx}{dt} = Ax \Rightarrow x = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \\ u \end{pmatrix}$$

(29)

В результаті отримали однорідну систему (29).

### **3. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ НАГРІВАННЯ ПЛОСКОЇ СТІНКИ**

Ми виконали комп'ютерне моделювання процесів нестационарної теплопровідності плоскої стінки, щоб вивчити вплив теплообміну на границях на нестационарні температурні поля. Для цього ми розглянули різні граничні умови, що можуть відрізнятися за температурою, тепловим потоком або коефіцієнтом теплообміну. Це дозволило нам отримати більш детальне розуміння того, як тепло передається через плоскі стінки, що є важливим фактором при проектуванні теплообмінних систем, реакторів, та будь-яких корпусних деталей з листового матеріалу та інших технічних пристроїв.

#### **3.1 Програмне забезпечення та загальні вихідні данні**

Scilab [22] - це безкоштовна відкрита платформа математичних обчислень з високим рівнем мови програмування, розроблена для вирішення численних задач. Її можна використовувати як інтерактивне середовище для розв'язування задач, так і програмування складних математичних обчислень. Scilab надає багато вбудованих функцій та інструментів для аналізу даних, моделювання та візуалізації результатів. Ця платформа підтримує різні типи даних, такі як числа з плаваючою комою, комплексні числа, масиви, матриці, структури, списки, графи та інші.

Xcos є графічним середовищем моделювання, яке дозволяє користувачеві створювати моделі динамічних систем з використанням блоків. Це дозволяє візуально створювати складні системи та динамічні моделі з різноманітних джерел, включаючи фізичні системи, системи керування та інші. Xcos дозволяє користувачеві вибирати блоки з бібліотеки, розташованої у правій частині вікна,

і перетягувати їх у центральну частину вікна, де вони можуть бути з'єднані лініями для створення повної моделі. Крім того, Xcos надає можливість візуалізувати дані з симуляцій. Наприклад, він дозволяє створювати графіки залежностей вхідних і вихідних сигналів, а також графіки залежностей внутрішніх параметрів системи від часу. Він також надає інші інструменти для візуалізації даних, такі як таблиці, діаграми тощо.

Xcos може бути використаний для моделювання різноманітних систем, включаючи електричні та електронні системи, системи керування, гідродинамічні системи, системи автоматизації та багато інших. Він дозволяє користувачеві досліджувати поведінку системи в різних умовах, змінюючи параметри системи та вхідні сигнали.

Узагальнюючи, Scilab та Xcos (рис. 4) - це потужні інструменти для математичних обчислень та моделювання динамічних систем, які дозволяють користувачеві створювати складні математичні моделі та візуалізувати дані з симуляцій у зручний спосіб.

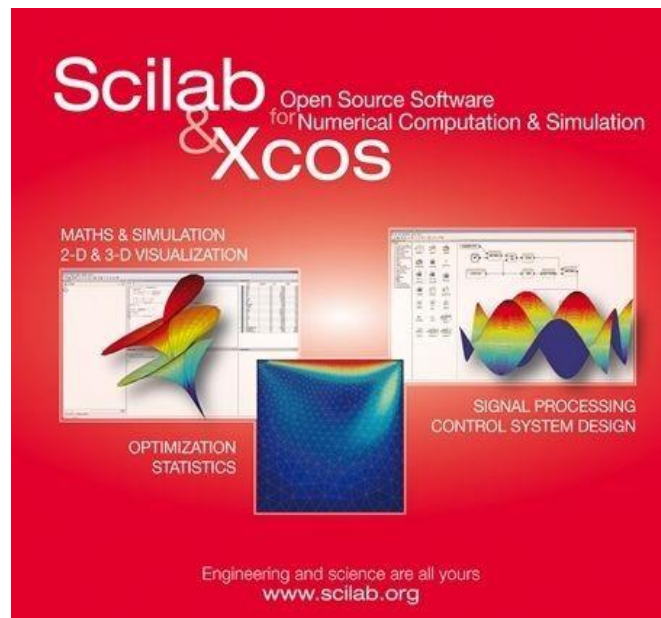


Рис.4 Комп'ютерна система Scilab.

Розглянемо результати розрахунків для наступних вихідних даних [21]:

$$\begin{aligned} a &= 15 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}, \quad l = 0,02 \text{ м}, \quad t_0 = 0, \quad T_{(0)} = 290\text{К}, \quad T_{(1)} = 790\text{К}, \\ \alpha &= 10 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}, \quad E = 195\text{ГПа}, \quad [\sigma] = 160\text{МПа}, \end{aligned} \quad (30)$$

де  $[\sigma]$ ,  $E$  та  $\alpha$  – задані допустиме напруження, модуль Юнга та коефіцієнт температурного розширення матеріалу пластини;  $l$  – розмір пластини;  $t_0$  – момент часу,  $T_{(0)}$  - задана температура,  $T_{(1)}$  - отримана температура;  $a$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини.

### **3.2 Моделювання задачі теплопровідності з обмеженням на міцність і керування, що зводиться до неоднорідної системи**

Для наближеного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь (18)–(20) використовуємо відомий метод Рунге-Куты 4-го порядку [16]; кількість вузлів  $n$  та крок інтегрування у часі  $\Delta t$  обираємо наступним чином [21]:

$$n = 31, \quad \Delta t = 0,01\text{с}. \quad (31)$$

Моделювання за даними розрахунками представлено на (рис.6). Лістинг коду представлено у додатку А.

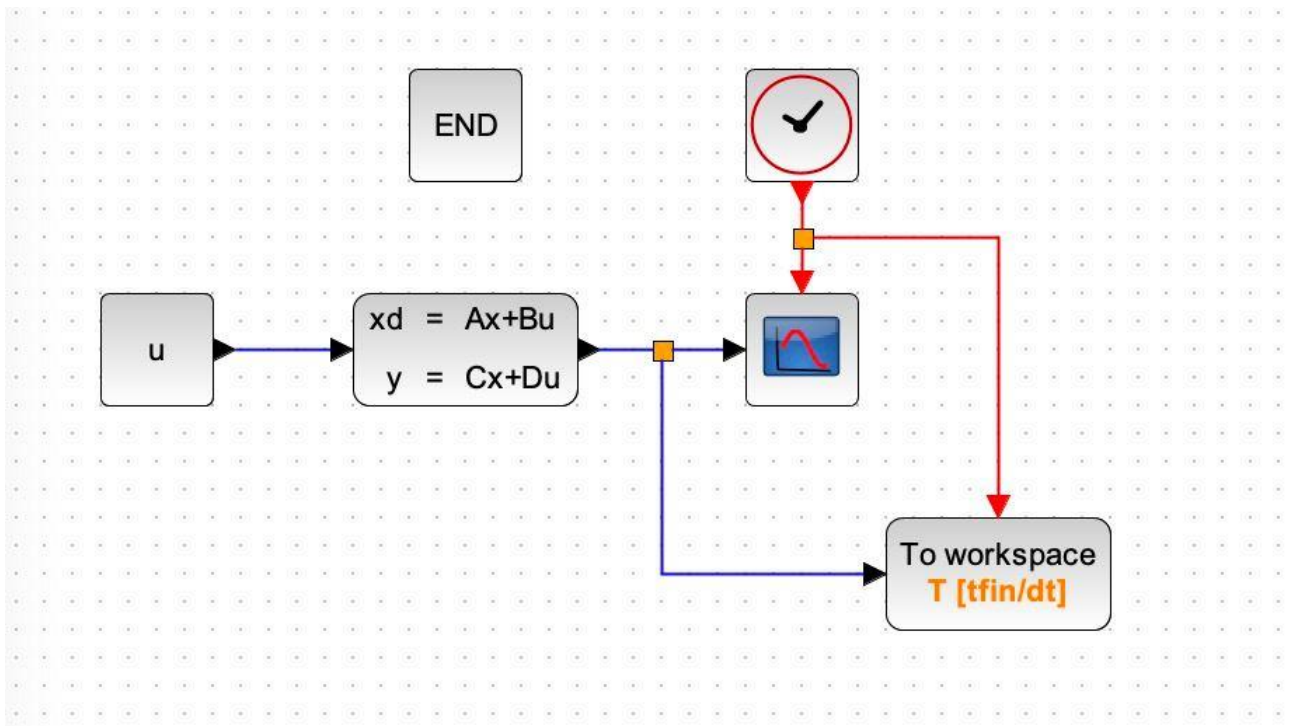


Рис. 6 Алгоритм для моделювання.

Результати моделювання можна побачити для різних  $T_n$  (рис. 7- 9).

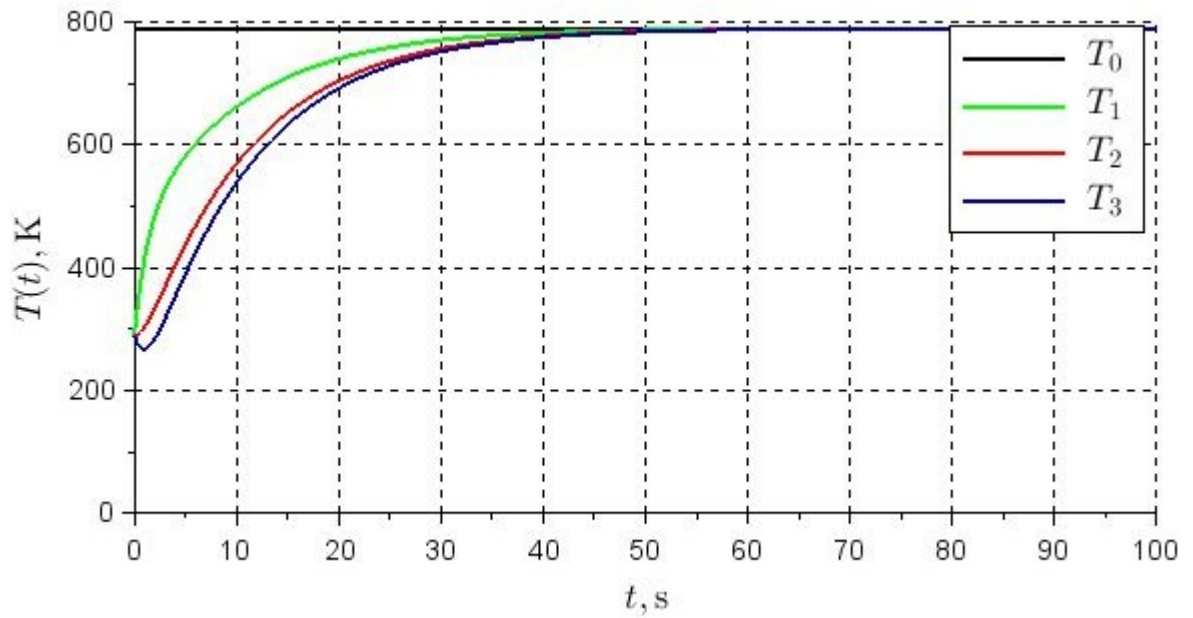


Рис. 7. Результати моделювання



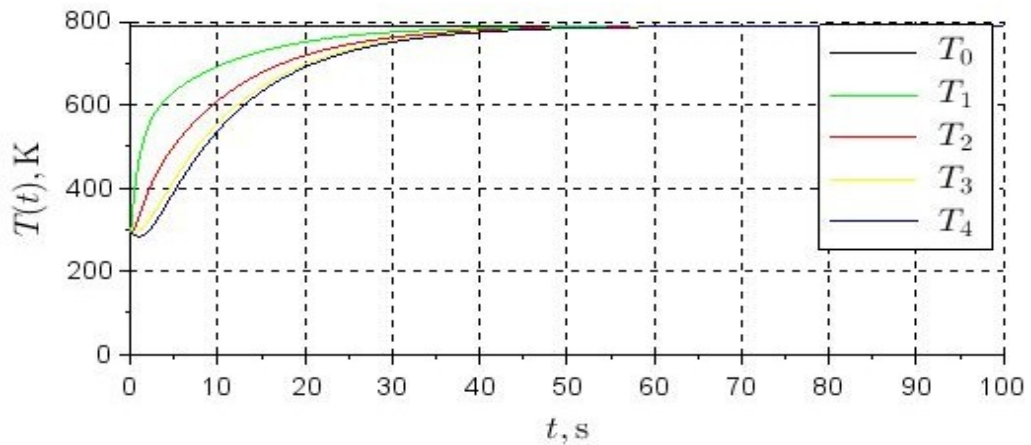


Рис. 8. Результати моделювання

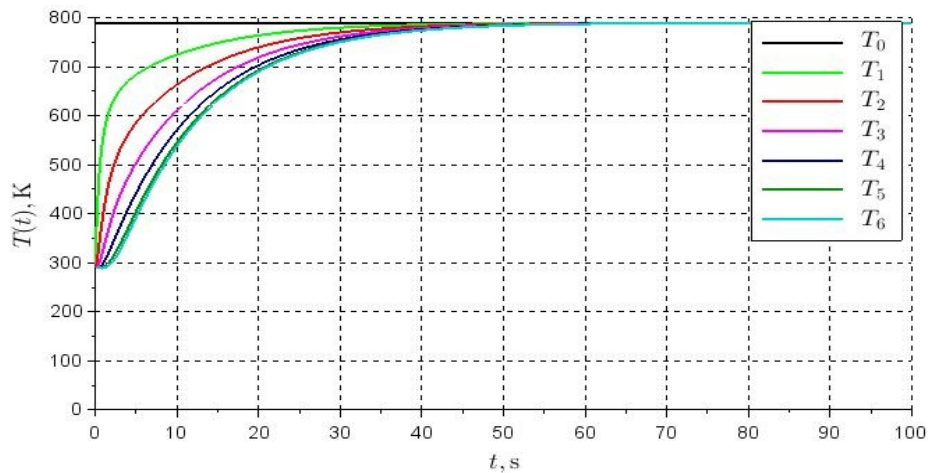


Рис. 9. Результати моделювання

Збільшення кількості вузлів обмежено часом машинного розрахунку, який помітно збільшується при збільшеній кількості  $n > 35$  через необхідність зменшення кроку інтегрування у часі [21]; в той же час результати розв'язування задачі теплопровідності для кількості вузлів  $n > 35$  не мають помітних відмінностей від результатів, що відповідають значенню (31), та не містять додаткової корисної інформації щодо температурного поля в пластині [21].

Деякі із результатів [21] розв'язування диференціальних рівнянь (18)–(21) для значень (30), (31) та значень  $m = 0$ ,  $m = n + 1$ ,  $m = 19$  представлені на рис. 2.

Програми управління  $u(t)$ , які відповідні значенням  $m = 0$  (рис. 5а) та  $m = n + 1$  (рис. 5б), забезпечують розігрів пластини за час  $t_1 \cong 80\text{с}$  [21]; різниця між ними [21] полягає в тому, що у випадку  $m = 0$  збільшення температури  $u(t)$  обмежується величиною  $T_{(1)}$  (рис. 5а), а у випадку  $m = n + 1$  збільшення температури  $u(t)$  здійснюється до повного розігріву пластини відповідно умові  $T_{n+1} = T_{(1)}$ , а потім змінюється шляхом стрибкового зменшення до значення  $T_{(1)}$  (рис. 5б). Програма управління  $u(t)$ , яка відповідна значенню  $m = 19$ , забезпечує [21] розігрів пластини за найкоротший час  $t_1 \cong 40\text{с}$  (рис. 5в); в цій програмі [21] збільшення температури  $u(t)$  здійснюється до прогріву приблизно 57% товщини пластини до температури  $T_{(1)}$ , а потім змінюється шляхом стрибкового зменшення до значення  $T_{(1)}$  (рис. 5в).

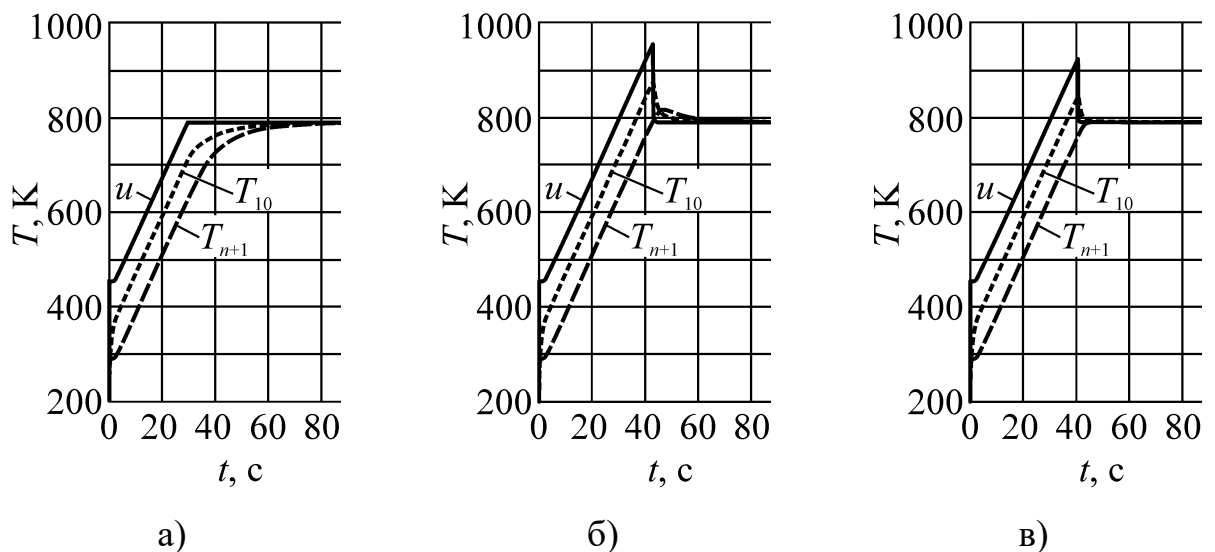


Рис. 5. Результати розрахунків для випадків  $m = 0$  (а),  $m = n + 1$  (б) та  $m = 19$  (в)

### 3.3 Рівняння теплопровідності з обмеженням на міцність і керування.

Моделювання за даними розрахунками пункту 2.2(рис. 10). Лістинг коду представлено у додатку Б.

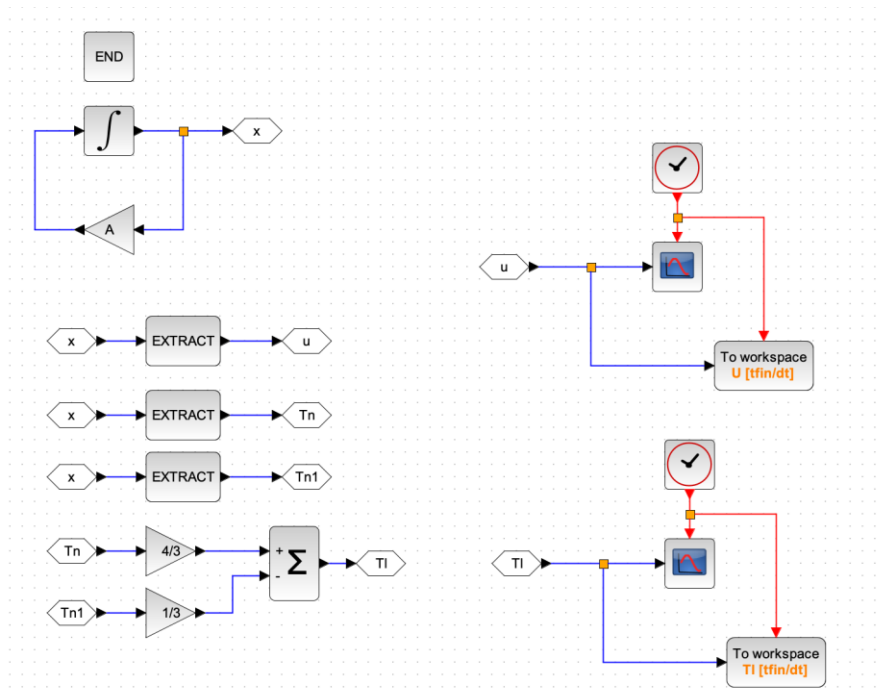


Рис. 10. Алгоритм моделювання.

Результат представлено на (рис. 11).

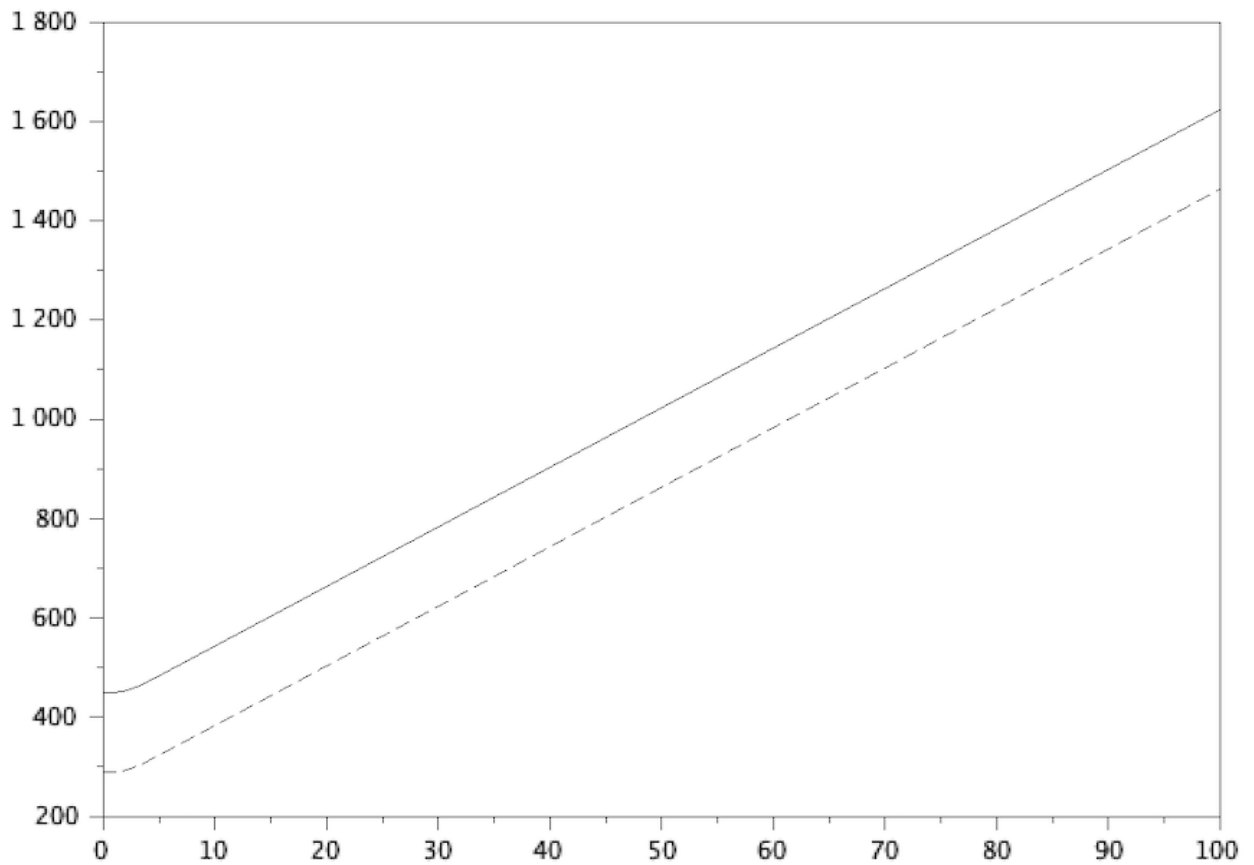


Рис. 11. Результат моделювання

Задача оптимізації управління нагрівом пластини – "плоскої стінки" - є прикладом практичного застосування запропонованого узагальненого підходу. В рамках цієї задачі розглядається процес нагріву пластини з певними умовами, який займає близько 35-40 секунд. Після цього настає момент, коли необхідно виключити нагрівання шляхом стрибкового зменшення управляючої температури до значення, яке відповідає умові розігріву пластини.

## ВИСНОВКИ

За отриманими результатами можна зробити наступні висновки: було розроблено новий узагальнений підхід для оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами, який поєднує метод напівдискретизації та методи покрокового інтегрування звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами [21]. Було показано, що використання методу напівдискретизації дозволяє зведення задачі оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами до задачі оптимізації програмного управління еквівалентної дискретної системи, представленої звичайними диференціальними рівняннями, відповідно до принципу максимуму Понтрягіна.

Наведений приклад оптимізації управління нагрівом пластини – "плоскої стінки" – демонструє можливості запропонованого узагальненого підходу для практичного використання. Результати дослідження показують, що для досягнення максимально швидкого розігріву пластини необхідно збільшувати температуру управління до певного моменту, а саме до близько 57% товщини пластини, після чого її потрібно різко знизити до необхідного рівня для досягнення заданої температури. Однак, для отримання більш точних результатів оптимізації програмного управління необхідно збільшувати кількість вузлів просторової дискретизації, що може призвести до збільшення похибки розв'язування задачі. Для вирішення цього недоліку планується автоматизувати вибір оптимального значення  $m$  у виразі (31) та дослідити вплив кількості вузлів на точність розв'язування задачі оптимізації програмного управління.

Також можна відзначити, що недоліком цього методу розв'язання задачі оптимізації програмного управління нагрівання пластини є відсутність автоматизації вибору номера вузла сітки  $sw$ , який використовується для

визначення функції  $f(t, x, u)$ . Це значно ускладнює пошук оптимального управління.

Застосування запропонованого узагальненого підходу [21] дозволяє ефективно вирішувати подібні задачі, оскільки він поєднує метод напівдискретизації та добре розроблені методи розв'язування задач керованості дискретних систем. В рамках цього підходу розглядаються системи з розподіленими параметрами, для яких метод напівдискретизації використовують для зведення вихідних диференціальних рівнянь у частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв'язати за допомогою високоефективних методів покрокового інтегрування.

Розроблений загальний підхід [21] щодо оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами має перспективи для розв'язання різних прикладних задач щодо автоматизації керування енергоустановками з обмеженнями міцності та ресурсу. Подальшим напрямком дослідження є оптимальне управління температурними полями в циліндричних тілах з різними типами граничних умов та умов обмеження міцності, що є важливими елементами теплових та ядерних енергоустановок, таких як твелів та корпусів ядерних реакторів та трубопроводів ядерних енергоустановок, теплообмінних труб та барабанів парових котлів, теплообмінних труб та корпусів парогенераторів реакторних установок.

Отже, запропонований підхід [21] може знайти широке застосування в різних галузях, де важливо забезпечувати ефективне керування системами з розподіленими параметрами, зокрема в промисловості, автомобільному виробництві, будівництві та інших.

## ДОДАТОК А

```
a=15E-6; l=0.02; T_0=290;
n=2;
u=790;
dz=1/(n+1);
A=zeros(n,n);
A(1,1)=-2.0; A(1,2)=1.0;
for i=2:n-1
    A(i,i-1)=1.0;
    A(i,i)=-2.0;
    A(i,i+1)=1.0
end
A(n,n)=-2/3; A(n,n-1)=2/3;
A=a/(dz^2)*A;
B=zeros(n,1); B(1,1)=a/(dz^2);
C=zeros(n+2,n);
for i=2:n+1
    C(i,i-1)=1.0;
end;
C(n+2,n-1)=-1/3; C(n+2,n)=4/3;
D=zeros(n+2,1); D(1,1)=1.0;
T_0=T_0*ones(n,1);
tfin=100; dt=0.01;
```

## ДОДАТОК Б

```
n=20;
a=15E-6; l=0.02; T_0=290; DT=160;
u=790;
dz=l/(n+1);
A=zeros(n+1,n+1);
A(1,1)=-2.0; A(1,2)=1.0;
for i=2:n-1
    A(i,i-1)=1.0;
    A(i,i)=-2.0;
    A(i,i+1)=1.0
end
A(n,n)=-2/3; A(n,n-1)=2/3;
A(1,n+1)=1;
A(n+1,n-2)=-(1/3);
A(n+1,n-1)=14/9;
A(n+1,n)=-11/9;
A=a/(dz^2)*A;
T_0=T_0*ones(n+1,1);
T_0(n+1,1)=T_0(n+1,1)+DT
tfin=100; dt=0.01;
```



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Matsuda T., Muta H., Tanaka K. Optimization of heating profile for densification of fuel pellets using Monte Carlo simulation // Computational Materials Science, 2017. - Vol. 138. - P. 346-352.
2. Almena A., Goode K.R., Bakalis S., Fryer P.J., Lopez-Quiroga E. Optimising food dehydration processes: energy-efficient drum-dryer operation // Energy Procedia. - 2019. - Vol. 161. - P. 174-181
3. Maia L. K. K., Drünert L., La Mantia F., Zondervan E. Expanding the lifetime of Li-ion batteries through optimization of charging profiles // Journal of Cleaner Production. - 2019. - Vol 225. - P. 928-938.
4. Hulkó G., Belavý C., Ondrejkoivič K., Bartalský L., Bartko M. Control of technological and production processes as distributed parameter systems based on advanced numerical modeling // Control Engineering Practice.- 2017. - Vol. 66. - P. 23-38.
5. Aguilar-Leal O., Fuentes-Aguilar R. Q., Chairez I., García-González A., Huegel J. C. Distributed parameter system identification using finite element differential neural networks // Applied Soft Computing. - 2016. - Vol. 43. - P. 633-642.
6. Boltyanski V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F., Pontryagin L.S. The maximum principle in the theory of optimal processes of control // IFAC Proceedings Volumes. - 1960. - Vol. 1, Is. 1. - P. 464-469.
7. Korobov V. I., Pavlichkov S. S., Schmidt W. H. Global robust controllability of the triangular integro-differential Volterra systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2005. - Vol. 309, Is. 215. - P. 743-760.
8. Rouff M. Non Linear Optimal Robot Control with Ordinary Differential Equations // IFAC Proceedings Volumes. - 1985. - Vol. 18, Is. 16. - P. 125-128.
9. Fardigola L.V. Transformation operators in controllability problems for the wave

- equations with variable coefficients on a half-axis controlled by the Diriclet boundary condition // *Mathematical Control and Related Fields*. - 2015. - Vol. 5. - P. 31–53.
10. Faugeras B., Blum J., Heumann H., Boulbe C. Optimal control of a coupled partial and ordinary differential equations system for the assimilation of polarimetry Stokes vector measurements in tokamak free-boundary equilibrium reconstruction with application to ITER // *Computer Physics Communications*. - 2017. - Vol. 217. - P. 43-57.
11. Pesch H.J. Optimal Control of Dynamical Systems Governed by Partial Differential Equations: A Perspective from Real-life Applications // *IFAC Proceedings Volumes*. - 2012. - Vol. 45, Is.2. - P. 1-12.
12. Fletcher C. A. J. Computational techniques for fluid dynamics. 1 Fundamental and General Techniques. - Berlin: Springer Verlag, 1991. - 404 p.
13. Sarker P., Chakravarty U.K. A generalization of the method of lines for the numerical solution of coupled, forced vibration of beams // *Mathematics and Computers in Simulation*. - 2020. - Vol.170. - P. 115-142.
14. Ferreira S.R. Freezing time of a slab using the method of lines // *International Journal of Refrigeration*. - 2017. - Vol. 75. - P. 77-94.
15. Speedy C.B., Brown R.F., Goodwin G.C. Control theory: identification and optimal control. - Edinburgh : Oliver and Boyd, 1970. - 293 p.
16. Lance G. N. Numerical methods for high speed computers. - London: Iliffe & sons Ltd, 1960. - 166 p.
17. PAR M. Fourier Theorie Analytique De La Chaleur – Paris: Chez Firmin Didot, Pere et Fils, 1822. – 642 c.
18. M. Necati Ozisik Heat Conduction – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993. – 693 c.
19. Suhas V. Patankar Numerical Heat Transfer and Fluid Flow – Taylor & Francis, 1980.– 197 c.

20. Коробов В.І, Сморцова Т.І. Керованість та стабілізація: навчальний посібник. Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2017. 78 с.
21. Невлюдов І. Ш., Ромашов Ю. В. Метод напівдискретизації для оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами  
URL:<http://journalsofznu.zp.ua/index.php/comp-science/article/view/1552/1486>
22. Офіційний сайт Scilab -URL: <https://www.scilab.org/>